数理解析研究所講究録
第 1815 巻 2012 年 124-132

円内接多角形問題と「算法発揮 (1690)」における解について*

森継 修一
SHUICHI MORITSUGU[†]
筑波大学大学院 図書館情報メディア研究科
GRADUATE SCHOOL OF LIBRARY, INFORMATION AND MEDIA STUDIES, UNIVERSITY OF TSUKUBA

1 はじめに

円内接多角形問題とは,
「円に内接する n 角形の各辺の長さ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が与えられたとき, その多角形の面積および外接円の半径を $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の式で表せ.」
という幾何学の問題である. 本研究では「外接円の半径」を与える方程式を導く問題に限定して考える.

$n = 3, 4$ に対しては, 以下のような古典的な結果が広く知られている.

- 三角形に対する Heron の公式 (1 世紀)

$$r = \frac{a_1a_2a_3}{\sqrt{(a_1+a_2+a_3)(-a_1+a_2+a_3)(a_1-a_2+a_3)(a_1+a_2-a_3)}}$$

- 四角形に対する Brahmagupta の公式 (7 世紀)

$$r = \sqrt{\frac{(a_1a_2+a_3a_4)(a_1a_3+a_2a_4)(a_1a_4+a_2a_3)}{(-a_1+a_2+a_3+a_4)(a_1-a_2+a_3+a_4)(a_1+a_2-a_3+a_4)(a_1+a_2+a_3-a_4)}}$$

これに対し, $n = 5$ の場合については, 1994 年に D.P.Robbins の論文 [5] が発表されるまで, まとまった知見は得られていなかった. Robbins は, 1つの長さの組 $\{a_1, \ldots, a_5\}$ に対して五角形が最大で 7 通り (凸のもの・星型のもの・辺が交差しているもの× 5 通り) 存在することを示し, 結果が 7 次方程式になることを指摘した. これを受けて, P. Pech[4] が 7 次方程式の具体的な導出に初めて成功した (2004 年) とされる. この方程式は, 全部展開すると 2,922 項からなるが, 以下のようにまとめて示すこととする.

$$A_7x^7 + A_6x^6 + A_5x^5 + A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0 \quad \cdots \quad (\clubsuit)$$

$$x = r^2, \quad A_i \in \mathbf{Z}[a_1, \ldots a_5]$$

一方, 筆者らは, 和算家が採り上げた連立代数方程式の消去計算に注目してきた [2][3] が, その中で, 井関知辰「算法発揮」(1690) の 第 7 問が「五角形の外接円の半径」を求めていることを見つけた. もし井関の結果が正しければ, Pech よりも 314 年前にこの問題は解決済みということになる. したがって, 井関の結果と現代の数式処理による終結式計算の結果とを照合することが本研究の端緒であった. その結果として, 現時点での成果は以下の 2 点である.

(i) 井関の結果は, 現在の数式処理システムによって, 完全に正しいことが検証された.

(ii) 六角形・七角形の外接円の半径を表す方程式を計算し, Robbins の予想と一致することを確認した.

*本研究は科研費 (22500004) の助成を受けたものである.
[†]moritsug@slis.tsukuba.ac.jp

2　五角形の場合

2.1　問題設定

井関知辰「算法発揮」(1690) は，行列式について書かれた世界初の刊本とされる．その第 7 問（図 1）では，五角形の外接円の直径を求めるため，五角形を 3 つの三角形に分割して式を立て，対角線を表す 2 つの変数を消去した結果，「而得開方式一十三乗方法開之得円径合問」と記している．「円径」は「直径」の意味であり，当時は乗算回数でベキ乗の次数を表していたため，「一十三乗」は d^{14} に相当する．Robbins および Pech による 7 次方程式 (♣) は，「半径の自乗」に関する次数なので，半径自体で表せば 14 乗となり，井関の結果と次数が一致している．

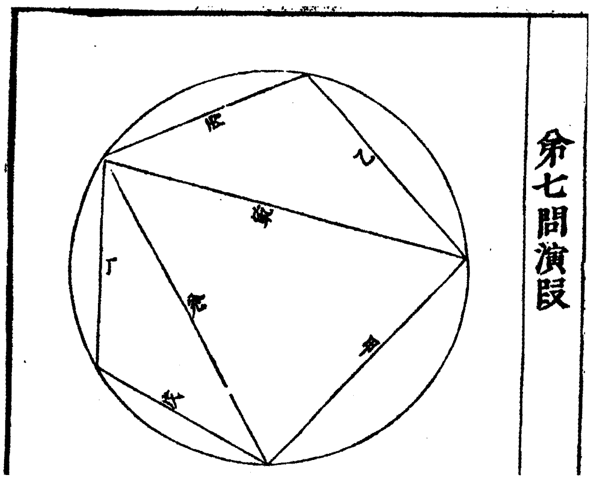

図 1: 「算法発揮」第 7 問

井関は，消去の方針のみ示して，最終的な「14 次式」を具体的には記していない．これは，以下のような当時の和算書における記述法と同様に，終結式による連立代数方程式の消去計算では，最終的に得られる 1 変数方程式が極めて複雑になるため，具体的に記さなくても「解けた」とみなされていたことによる．

- 関孝和「発微算法」(1674) 「解伏題之法」(1683)
- 建部賢弘「発微算法演段諺解」(1685)
- 宮城清行「明元算法」(1689)

次節において，井関の消去計算が完全に正しいことを示す．すなわち，最後まで計算を実行していれば，得られる 1 変数方程式は，現代の数式処理システムで求めた結果 (♣) と一致することを示す．

2.2　数式処理による計算

図 1 と同様に，円内接五角形を 3 つの三角形に分割し，対角線の長さを u, v とする．辺の長さの組はそれぞれ $\{a_1, a_2, u\}$, $\{u, v, a_5\}$, $\{a_3, a_4, v\}$ となるので，これらに Heron の公式を適用すると，$\mathbf{Q}(a_1, \ldots, a_5)[u, v, r]$ における連立代数方程式が得られる．

$$\left\{\begin{array}{lcl} f_1 & = & (a_1+a_2-u)(a_2+u-a_1)(u+a_1-a_2)(a_1+a_2+u)r^2 - a_1^2a_2^2u^2 \\ f_2 & = & (u+v-a_5)(v+a_5-u)(a_5+u-v)(u+v+a_5)r^2 - u^2v^2a_5^2 \\ f_3 & = & (a_3+a_4-v)(a_4+v-a_3)(v+a_3-a_4)(a_3+a_4+v)r^2 - a_3^2a_4^2v^2 \end{array}\right.$$

終結式計算により v と u を順次消去し，r のベキになっている冗長因子を除外すると

$$h(r^2) := \mathrm{Res}(f_1, \mathrm{Res}(f_2, f_3, v), u)/r^\ell,$$

とおいたものが (♣) 式になる．直径を用いた表現に変換するため，$D = (2r)^2$ とおいて

$$p(D) := 4^7 h(D/4)$$

としたものが，井関が求めた式になるはずである．

```
#-----------------------------------------------------------------
# d:角 (=円^2)  a1:甲  a2:乙  a3:丙  a4:丁  a5:戊
> p1:=(a2^4+a3^4-2*a2^2*a3^2)*d:                          # p1:亢
> p2:=d*a2^2+d*a3^2-2*a2^2*a3^2:                           # p2:氐
> p3:=a4^4+a5^4-2*a4^2*a5^2:                               # p3:房
> p4:=d*a4^2+d*a5^2-2*a4^2*a5^2:                           # p4:心
> p5:=d-2*a1^2:                                            # p5:尾
> p6:=2*d^2*a1^2+2*p4*p5-d*p2:                             # p6:箕
#-----------------------------------------------------------------
> p7:=(6*d^2*a1^4 + 8*p4*p5*a1^2 + 4*p3*p5^2 + 4*p4^2)
>     - (2*d^2*p3 + 4*d*p4*a1^2 + d*p1):                   # p7:計
> p8:=(d^2*a1^6 + p3*p4*p5 + p4*p5*a1^4 + 2*p4^2*a1^2)
>     - (d^2*p3*a1^2 + 2*d*p3*p5*a1^2 + 2*d*p4*a1^4):      # p8:牛
> p9:=(d^2*p3^2 + d^2*a1^8 + 4*p4^2*a1^4 + 2*d^2*p3*a1^4)
>     - (4*d*p3*p4*a1^2 + 4*d*p4*a1^6):                    # p9:女
#-----------------------------------------------------------------
> q1:=4*p1*p8 - 2*p2*p9:                                   # q1:虚
> q2:=p1*p7 - d*p9:                                        # q2:危
> q3:=p1*p6 + p2*p7 - 2*d*p8:                              # q3:室
#-----------------------------------------------------------------
> q4:=d*q2^2 + 4*p1^2*p6*q3 + 8*p2^2*p6*q1:           # q4:寄左
> q5:=2*d*q3*q1 + 8*p1*p2*p6*q2:                      # q5:寄左相消
#
# Izeki's solution
> p_Izeki:=simplify(q4-q5): degree(p_Izeki,d);
                                       7

#
# Confirmation: if it is 0, p_Izeki is correct.
> simplify(p_Izeki - pD);
memory used=122.2MB, alloc=40.2MB, time=2.41
                                       0

#-----------------------------------------------------------------
```

図 2: Maple による井関の結果の確認

図 2 に Maple による検証の過程を示す.（一部の漢字は，文字コードの関係上，近い字体で当ててある.）「算法発揮」では,（結果が巨大になるため）最後のステップである $q_4 - q_5$ の計算を実行していないものの，上記の結果は，井関の解が $p(D)$ と一致していることを示している．

2.3 五角形に対する公式 (♣) の性質

特殊なケースをいくつか考え，辺の長さ $a_1, \ldots, a_5$ に特定の値を代入した場合の式を示す．

- 等辺の場合 ($a_i := 1,\ \ i = 1, \ldots 5$)

$$1215x^7 - 3240x^6 + 3618x^5 - 2205x^4 + 795x^3 - 170x^2 + 20x - 1$$
$$= (5x^2 - 5x + 1)(3x - 1)^5 = 0$$

  と因数分解されるので，それぞれから得られる半径は，

$$r = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}},\ \ \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}},\ \ \frac{1}{\sqrt{3}}\ \ (5\text{重根})$$

  となり，これらはそれぞれ，正五角形・星芒形・正三角形に退化した場合，に相当している．

- 四角形に退化させた場合 ($a_5 := 0$)

$$x^3(Ax - B)^2(Cx - D)^2 = 0 \qquad (A, B, C, D \in \mathbf{Z}[a_1, \ldots a_4])$$

  と因数分解され，$r = \sqrt{B/A}$ が Brahmagupta の公式に相当するので，($\clubsuit$) は四角形の場合を含んだ公式になっている．

3 六角形の場合への拡張

3.1 Robbins の予想

D.P.Robbins[5] は，与えられた辺の長さの組 $\{a_1, \ldots, a_n\}$ に対して，円に内接する図形が最大何通り存在するかを数え上げて，以下の式を予想として提示している．

$$k_n = \sum_{j=0}^{n-1}(n-j)\begin{pmatrix} 2n+1 \\ j \end{pmatrix}$$

すなわち，$k_1, k_2, k_3, \ldots = 1, 7, 38, 187, 874, \ldots$ とおいたとき，

- $(2n+1)$ 角形に対する半径は高々k_n 通り存在する
- $(2n+2)$ 角形に対する半径は高々$2k_n$ 通り存在する

ことが予想されている．具体的には，この評価式は，外接円の半径を求めるための方程式が

- 三角形→ 1 次方程式，五角形→ 7 次方程式，七角形→ 38 次方程式 , ...
- 四角形→ 2 次方程式，六角形→ 14 次方程式 , ...　　それぞれ，(k_n 次式) $\times$ (k_n 次式) に因数分解可能

となることを示唆している．

$n = 3$ に対しては，明らかに 1 通りの場合しか存在しない（Heron の公式）．

$n = 4$ に対して，すべての場合を含む式を求めると，前節でみたような

$$(Ax - B)(Cx - D) = 0 \qquad (A, B, C, D \in \mathbf{Z}[a_1, \ldots a_4])$$

という形の 2 次方程式になる．このうち，Brahmagupta の公式に相当する $r = \sqrt{B/A}$ は凸四角形の場合であり，他方の $r = \sqrt{D/C}$ は辺が交差するような（凸ではない）四角形の場合を表している．

これまでの計算から，三角形・四角形・五角形については Robbins の予想が正しいことが確認されたことになる．ただし，五角形に対する 7 次方程式 ($\clubsuit$) は，一般には因数分解できないので,「凸五角形に対する式」だけを取り出すことは不可能である．

3.2　六角形の場合への拡張

円内接六角形を4つの三角形に分割し，辺の長さの組を $\{a_1, a_2, u\}$, $\{u, v, a_6\}$, $\{a_5, v, w\}$, $\{a_3, a_4, w\}$ としてHeronの公式を適用する．分割の仕方は一通りではないが，どれを用いても最終結果が一致することを確認してある．(したがって,「五角形に対する式」と「三角形に対する式」を連立させて解いても，同じ結果が得られる.)

このとき，$\mathbf{Q}(a_1, \ldots, a_6)[u, v, w, r]$ における連立代数方程式

$$\begin{cases} f_1 &= (a_1+a_2-u)(a_2+u-a_1)(u+a_1-a_2)(a_1+a_2+u)r^2 - a_1^2a_2^2u^2 \\ f_2 &= (u+v-a_6)(v+a_6-u)(a_6+u-v)(u+v+a_6)r^2 - u^2v^2a_6^2 \\ f_3 &= (a_5+v-w)(v+w-a_5)(w+a_5-v)(a_5+v+w)r^2 - a_5^2v^2w^2 \\ f_4 &= (a_3+a_4-w)(a_4+w-a_3)(w+a_3-a_4)(a_3+a_4+w)r^2 - a_3^2a_4^2w^2 \end{cases}$$

から，終結式計算により w, v, u を消去し，余計な因子を除外すればよい．CPU時間は約2分（計算環境：Maple14(Win64), Xeon(2.93GHz) × 2, 24GB）である．

$$\mathrm{Res}(f_1, \mathrm{Res}(f_2, \mathrm{Res}(f_3, f_4, w), v), u)/r^\ell = 0$$

$$\Rightarrow \quad B_{14}x^{14} + \cdots + B_1x + B_0 = 0 \ \cdots \ (\diamondsuit) \qquad x = r^2, \quad B_i \in \mathbf{Z}[a_1, \ldots a_6]$$

得られた六角形に対する公式 $(\diamondsuit)$ の性質として，以下のような点が確かめられた．

(i) Robbinsの予想の通り，14次式が得られている．

(ii) 「7次式× 7次式」に因数分解できる（上述の計算環境で約9時間）点も，Robbinsの予想と一致する．

(iii) $(\diamondsuit)$ において $a_6 := 0$ とすると，

$$(A_7x^7 + A_6x^6 + A_5x^5 + A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0)^2 = 0,$$

の形に因数分解されるので，五角形の公式 $(\clubsuit)$ が $(\diamondsuit)$ に包含されていることが分かる．

(iv) $(\diamondsuit)$ を因数分解して，$x\ (= r^2)$ に関する各7次式について考える．

$$f_1(a_1, \ldots, a_6, x) \cdot f_2(a_1, \ldots, a_6, x) = 0$$

等辺の場合 $(a_i := 1)$，五角形の場合 $(a_6 := 0)$ を組み合わせると，以下のような式が得られる．

- $f_1(1,1,1,1,1,1,x) \quad \Rightarrow \quad (3x-1)(2x-1)^6 = 0$　　（正三角形・正方形に相当）
- $f_1(1,1,1,1,1,0,x) \quad \Rightarrow \quad (5x^2-5x+1)(3x-1)^5 = 0$　（正五角形・星芒形・正三角形に相当）
- $f_2(1,1,1,1,1,0,x) \quad \Rightarrow \quad (5x^2-5x+1)(3x-1)^5 = 0$　（同上）
- $f_2(1,1,1,1,1,1,x) = 0$　式が恒等的に0になってしまい，正六角形の場合を表せない．

等辺の偶数角形の場合,「2辺ずつが重なった折れ線」のような図形が含まれ，その外接円の半径は連続的に変化することができる（$1/2 \le r < \infty$）ので，多項式の根では表されなくなる．$n = 6$ の場合，まず，$a_1, \ldots, a_5 := 1$ とすると，

$$f_2(1,1,1,1,1,a_6,x)/(a_6-1)^{10} = ((a_6-5)x^2 + 5x - 1)((a_6+3)x-1)^5$$

という関係が成り立ち，この右辺に $a_6 := 1$ を代入すると，$(4x-1)^6(x-1) = 0$ を得る．これは,「6辺が1本に重なっている場合 $(r = 1/2)$」と「正六角形の場合 $(r = 1)$」を表している．

注 比較のため，$n=4$ に対する 2 次式の詳細を確かめると，以下のような構造を持つことが分かる．

$$f_1(a_1,\ldots,a_4,x)\cdot f_2(a_1,\ldots,a_4,x)=0$$

ここで，f_1,f_2 とも x についての 1 次式であり，f_1 が Brahmagupta の公式（凸四角形の場合）に対応しているものとする．等辺の場合 $(a_i := 1)$，三角形の場合 $(a_4 := 0)$ を組み合わせると，以下が得られる．

- $f_1(1,1,1,1,x) \quad\Rightarrow\quad 2x-1=0$ （正方形に相当）
- $f_1(1,1,1,0,x) \quad\Rightarrow\quad 3x-1=0$ （正三角形に相当）
- $f_2(1,1,1,0,x) \quad\Rightarrow\quad 3x-1=0$ （同上）
- $f_2(1,1,1,1,x) \;=\; 0$ このとき，まず，$a_1,a_2,a_3 := 1$ とすると，

$$f_2(1,1,1,a_4,x)/(a_4-1)^3=(a_4+3)x-1$$

という関係が成り立ち，この右辺に $a_4 := 1$ を代入すると，$4x-1=0$ を得る．これは，「4 辺が 1 本に重なっている場合 $(r=1/2)$」に相当する．

4 七角形の場合への拡張

4.1 七角形の場合への拡張

六角形に対する式 $(\diamondsuit)$ が計算済みであることを利用し，七角形を「六角形＋三角形（対角線の長さ u）」に分割したとみると，$x=r^2$ について

$$\left\{\begin{array}{lcll} f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,u;x) & = & 0 & (\deg_x f=14) \\ g(u,a_6,a_7;x) & = & 0 & (\deg_x g=1) \end{array}\right.$$

という連立代数方程式から，終結式 $\mathrm{Res}(f,g;u)$ を計算すればよいが，この結果は巨大な式になるため，直接計算することは困難と思われた．そこで，以下の手順で計算を行った．

まず，辺の長さ a_i,u は a_i^2, u^2 の形でしか f,g の中に現れないので，$\tilde{a}_i=a_i^2$, $\tilde{u}=u^2$ と置き換えて，両式を $\tilde{u}$ について整理する．

$$\left\{\begin{array}{lcl} f & = & p_{16}\tilde{u}^{16}+\cdots+p_1\tilde{u}+p_0 \\ g & = & q_2\tilde{u}^2+q_1\tilde{u}+q_0 \end{array}\right. \qquad (p_i,q_i\in\mathbf{Z}[\tilde{a}_1,\ldots\tilde{a}_7,x])$$

次に，f を g で割った擬剰余を計算する．

$$h := \mathrm{prem}(f,g;\tilde{u})=r_1\tilde{u}+r_0 \qquad (r_i\in\mathbf{Z}[\tilde{a}_1,\ldots\tilde{a}_7,x])$$

この h を用いれば，終結式 $\mathrm{Res}(f,g;u)$ の代わりに $\mathrm{Res}(g,h;u)$ を計算すればよいことになる．しかしながら，この g,h に対してさえ Resultant 組込関数では処理できなさそうなので，2 次式と 1 次式に対する Sylvester 行列式

$$\mathrm{Res}(ax^2+bx+c,dx+e)=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & \\ & d & e \end{vmatrix}=ae^2+cd^2-bde$$

に g,h の係数を直接代入して，$\phi(x):=q_2r_0^2+q_0r_1^2-q_1r_2r_1$ とおけば，$\tilde{u}$ が消去されて，$\phi(x)\in\mathbf{Z}[\tilde{a}_1,\ldots\tilde{a}_7,x]$ を得たことになる．(以上の計算は，Maple では明示的に指示するまで式を展開しないことを利用している．必要な CPU 時間は，前述の環境で約 7 分である．)

さらに，$\phi(x)$ の低次項から順に各係数を調べると，x^{20} 以下の項の係数はすべて 0 であったので，

$$\varphi(x) := \phi(x)/x^{21} \quad \cdots \quad (\spadesuit)$$

とおくと，これは x についての 38 次式となり，Robbins の予想と一致する結果が得られた．現在の計算環境では，x の次数ごとに各係数を展開・整理して項数を調べるのが限界であり，全体を整理することは困難である．項数の最大は，x^{19} の係数で 19,464,837 項，ファイル（Maple の内部形式による）のサイズの最大は，x^{18} の係数で 777MB であった．

4.2 七角形に対する公式 ($\spadesuit$) の性質

$\varphi(x) = 0$ において，等辺の場合 ($\forall a_i := 1$) を計算すると

$$(7x^3 - 14x^2 + 7x - 1)(5x^2 - 5x + 1)^7(3x - 1)^{21} = 0$$

となり，これらの因子は，正七角形・星型七角形× 2 種／正五角形・星芒形／正三角形に相当しているため，規則性から結果は正しいものと思われる．さらに，$\varphi(x)$ は以下の性質を持つことが確かめられる．

- 主係数は $\prod(a_1 \pm a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm a_4 \pm a_5 \pm a_6 \pm a_7)$ （複合はすべての組合せで，計 64 項）
- 定数項は $a_1^{20}a_2^{20}a_3^{20}a_4^{20}a_5^{20}a_6^{20}a_7^{20}$
- $a_7 := 0$ を代入すると六角形の公式 ($\diamondsuit$) を含む方程式が得られる．

$$x^{10}(B_{14}x^{14} + \cdots + B_1x + B_0)^2 = 0$$

注 一辺が 1 の正七角形の外接円の半径 r は，以下のようにして求められる．正弦に対する 7 倍角の公式は，

$$\sin 7\theta = -64\sin^7\theta + 112\sin^5\theta - 56\sin^3\theta + 7\sin\theta$$

で与えられるので，$\theta = \pi/7$ のとき，$-64\sin^6\theta + 112\sin^4\theta - 56\sin^2\theta + 7 = 0$ が成り立つ．これに $\sin\theta = 1/(2r)$ を代入して整理すると，$7r^6 - 14r^4 + 7r^2 - 1 = 0$ が得られる．

5 まとめと今後の課題

和算における「円内接五角形問題」は，池田昌意「数学乗除往来」(1674) の遺題第 3 問として，「辺の長さを 5 寸，6 寸，7 寸，8 寸，9 寸としたとき，外接円の直径を求めよ」という形で出題されたことに始まっている．これに対する解答は以下の書で扱われている．（原文は，東北大学「和算資料データベース」http://dbr.library.tohoku.ac.jp/infolib/meta_pub/G0000002wasan で参照可能である．）

- 佐治一平「算法入門」／松田正則「算術詳解」(1680) （松田は佐治の弟子，これらは同一の書．）
  記述は 2 行のみで，「5 辺の長さと対角線 2 本の長さから 7 変数の式を立てればよい」という趣旨の内容しか書かれていない．
- 建部賢弘「研幾算法」(1683) → 正しい 14 次方程式を導いている．
- 井関知辰「算法発揮」(1690) → 正しい 14 次方程式を別解法で導いている．

図 2 に示した井関の解 [1] の検証に加え，建部の解 [6] も別途検証し，建部・井関の解がともに正しいことを本研究では確認している．

なお,「数学乗除往来」に与えられた辺の長さの組「5 寸，6 寸，7 寸，8 寸，9 寸」からは，7 次方程式の解が「5 実数解＋共役複素数の解 1 組」として得られるので，対応する半径は以下の 5 通り存在する．

$$r = 4.5059, \quad 4.6021, \quad 4.8029, \quad 6.0198, \quad 6.0355$$

長さ $a_i \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ の各辺に対する中心角を，順に $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5\}$ とすると，$\theta_i = 2\arcsin(a_i/2r)$ で与えられることから，各半径に対して次のような関係があることを数値計算により確かめた．

$$\begin{aligned}
r = 4.5059 &\Rightarrow \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 = 0 \\
r = 4.6021 &\Rightarrow \theta_1 - \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = 2\pi \\
r = 4.8029 &\Rightarrow -\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = 2\pi \\
r = 6.0198 &\Rightarrow \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = 2\pi \\
r = 6.0355 &\Rightarrow \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 = 0
\end{aligned}$$

これらに対する作図は，以下の手順 [5] で実行可能である．

(1) xy 平面上に，計算された半径 r を持つ円周 $x^2 + y^2 = r^2$ を描く．

(2) 円周上の任意の点を始点として，長さ 5, 6, 7, 8, 9 の辺の端点を円周上に順次取っていく．

(3) このとき，上記の式において，$+\theta_i$ に対応する辺は原点から見て反時計回りの方向に，$-\theta_i$ に対応する辺は時計回りの方向に取るものとする．

したがって，$r = 6.0198$ が凸五角形に対する半径であり，他は円内で辺が交差するような図形になるが，実際にこの値を求めた和算家が存在したかどうかは，現時点の筆者には不明である．和算研究の観点からは，問題自身および解法の系譜を明らかにすることも今後の課題になると思われる．

n	次数	項数
3	1	7
4	2	71
5	7	2,922
6	14	497,417
7	38	337,550,051

表 1: 円内接 n 角形に対する $x(= r^2)$ の定義方程式の形状

一方で，計算幾何学の観点から，六角形・七角形に対してまで，半径を与える方程式を具体的に導いたことは成果であると考えられる．調べた範囲では，これらについて公表された結果は存在しないようである．七角形に対する 38 次方程式は，Maple の内部形式 (*.m) で 2 つのファイルに分割保存して計約 15GB となり，現在の計算環境では，展開した形の 1 つの式として読み込むことすらできないサイズである．今後は，「面積を表す式」の効率的計算法や「半径公式と面積公式の関係」などを調べてみたいと考えている．

謝辞

広島大学名誉教授松本堯生先生には,「研幾算法」「算法発揮」における円内接五角形問題の取り扱いについて多くの貴重なご教示をいただいたことを，ここに深謝する．

参考文献

[1] 岩知道秀樹: 「算法発揮」—現代語訳とその解説—, 広島大学理学部卒業論文, 2008. (http://www.wasan.earth.linkclub.com/hakki/hakki.html).

[2] Moritsugu, S. and Arai, C.: An Application of Computer Algebra to Studies on the History of Japanese Mathematics, 数式処理 (*Bulletin of Japan Soc. Symbolic and Algebraic Computation*), **15**(2), 2008, 3–13.

[3] 森継修一, 横山和弘, 荒井千里: 和算における「冪乗演段」で扱われた連立代数方程式の解について, 数式処理 (*Bulletin of Japan Soc. Symbolic and Algebraic Computation*), **16**(2), 2009, 3–11.

[4] Pech, P.: Computations of the Area and Radius of Cyclic Polygons Given by the Lengths of Sides, *ADG2004* (Hong, H. and Wang, D., eds.), *LNAI*, **3763**, Gainesville, Springer, 2006, 44–58.

[5] Robbins, D. P.: Areas of Polygons Inscribed in a Circle, *Discrete & Computational Geometry*, **12**(1), 1994, 223–236.

[6] 竹之内脩: 研幾算法と研幾算法演段諺解, 近畿和算ゼミナール報告集 9, 東京, 2004.